Cvičení ze stochastické analýzy

3. Wienerův proces

1. definice a charakterizace Wienerova procesu
2. Brownův most

---

1. Nechť W_t je $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Ukažte, že následující procesy jsou $\mathcal{F}_t$-martingaly $W_t, W_t^2 - t, e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$. Pro jaké $p \in [1, \infty)$ jsou tyto procesy $\mathbb{L}_p$-martingaly ?
2. Buďte W_t, V_t dva nezávislé $\mathcal{F}_t$-Wienerovy procesy, ukažte, že proces $W_t V_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal a rozhodněte, pro jaké $p \in [1, \infty)$ je tento proces $\mathbb{L}_p$-martingal.
3. Buď B_t Wienerův proces na intervalu $[0, 1]$. Ukažte, že $W_t = B_{1-t} - B_1$ je také Winerův proces na intervalu $[0, 1]$.
4. Buď B_t Wienerův proces. Ukažte, že Brownův most $B_t^\circ = B_t - t \cdot B_1, t \in [0, 1]$ je centrovaný gaussovský proces nezávislý s B_1 a spočtěte jeho kovarianční strukturu.
5. Buď $B_t^\circ, t \in [0, 1]$ Brownův most a $X \sim N(0, 1)$ nezávislá s B°. Ukažte, že $W_t = B_t + t \cdot X$ je Wienerův proces na $[0, 1]$.
6. Nechť $W_1, \ldots, W_n$ jsou nezávislé Wienerovy procesy. Pro jaké $\lambda \in \mathbb{R}^n$ je proces $\lambda^\intercal W$ opět Wienerův. Najděte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\lambda^\intercal W(t), \mu^\intercal W(t)$ jsou nezávislé Wienerovy procesy.
7. Rozhodněte, zda existují dva Wienerovy procesy B, W takové, že $B(t) = t \cdot W(1/t)$.
8. Nechť $X = (X_t, t \geq 0)$ má spojité trajektorie a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je proces $M_t^{(\alpha)} = \exp\{\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2} t\}$ $\mathcal{F}_t$-martingal. Ukažte, že pak proces X_t je $\mathcal{F}_t$-Wienerův.[1]
9. Nechť W_t je Wienerův proces a $t_i^{(n)} = i/n$ jsou dělící body ekvidistantního dělení s krokem $1/n$. Odvoďte asymptotiku posloupnosti

$$V_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} |W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}}|^p$$

pro $n \to \infty$ (v pravděpodobnosti a také asymptotické rodělení - po vhodné normalizaci).
10. Spočtěte kvadratickou variaci (a totální variaci) Poissonova procesu na intervalu $[0, t]$ (dle definice z přednášky).

Je-li $Ee^{|\lambda X|} < \infty$, pak pro charakteristickou funkci n.v. X dle Lebesgueovy věty o majorantě platí

$$Ee^{itX} = E \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{i^k t^k}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{i^k t^k}{k!} EX^k, \quad |t| \leq |\lambda|.$$

[1]Návod: Přes charakteristické funkce postupně ukažte, že
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ Ee^{\lambda X} = e^{\lambda^2/2} \Rightarrow X \sim N(0, 1)$.
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad E[e^{\lambda X} | \mathcal{B}] = Ee^{\lambda X} < \infty \Rightarrow$ náhodná veličina X je nezávislá se σ-algebrou $\mathcal{B}$.